Enseignants: Candil, Dubuis, Huruguen
Algèbre Linéaire & Géométrie - MAN
4 juillet 2022
Durée : 180 minutes

X

Examen (corrigé)

SCIPER : **XXXXXX**

Attendez le début de l'épreuve avant de tourner la page. Ce document est imprimé recto-verso, il contient 8 pages, la dernière étant vide. Il y a 12 questions pour un total de 42 points. Merci de ne pas dégrafer le livret.

- Posez votre **carte d'étudiant** sur la table.
- Aucun **document** n'est autorisé.
- L'utilisation d'une **calculatrice** et de tout **outil électronique** est interdite pendant l'épreuve.
- Pour les questions à **choix unique**, on comptera :
  - le nombre de points indiqués si la réponse est correcte,
  - 0 point si il n'y a aucune ou plus d'une réponse inscrite,
  - 0 point si la réponse est incorrecte.
- Utilisez un **stylo** à **encre noire** ou **bleu foncé** sauf éventuellement pour vos dessins que vous pouvez faire au **crayon**.
- Effacez proprement avec du **correcteur blanc** si nécessaire.
- Aucune **feuille supplémentaire** ne sera distribuée.
- Les **feuilles de brouillon** ne seront pas ramassées.

Première partie, questions à choix unique

Pour chaque énoncé proposé, plusieurs questions sont posées. Pour chaque question, marquer la case correspondante à la réponse correcte sans faire de ratures. Il n'y a qu'**une seule** réponse correcte par question.

Enoncé

On donne les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 3 & -4\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}30\\2\\5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 18 & -1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}13\\28\\57\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6 & -7 & 2\end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix}-7 & 5\\-6 & 10\end{pmatrix},\quad C = \begin{pmatrix}3 & -4 & 7\\1 & 2 & 3\\5 & 0 & 13\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad D = \begin{pmatrix}1 & 4 & -2\\3 & -4 & 9\\5 & 6 & -10\end{pmatrix}.$$

Question 1 *(1 point)* Donner le coefficient situé sur la deuxième ligne et troisième colonne de A :

☐ 58 ☐ -306 ☐ 62 ■ 50

Question 2 *(1 point)* Que vaut le coefficient situé sur la première ligne et deuxième colonnne de B^{-1} ?

☐ $-\frac{3}{20}$ ☐ $-\frac{1}{8}$ ■ $\frac{1}{8}$ ☐ $\frac{3}{20}$

Question 3 *(2 points)* Quel est le rang de la matrice CD ?

☐ 1 ■ 2 ☐ 0 ☐ 3

Enoncé

Notons $\mathcal{B}_{\text{can}} = e_1, e_2, e_3$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On donne deux applications linéaires :

$$f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

de matrices respectives :

$$A = [f]_{\mathcal{B}_{\text{can}}} \quad \text{et} \quad B = [g]_{\mathcal{B}_{\text{can}}}$$

en base canonique. On suppose qu'en faisant subir à A les opérations suivantes :

$$C_2 \leftarrow C_2 + 2C_1\,,\ L_2 \leftarrow 2L_2\,,\ C_3 \leftarrow C_3 - C_2\,,\ L_1 \leftrightarrow L_3\,,$$

on obtient la matrice B.

Question 4 *(2 points)* Si $\det f = 12$, combien vaut $\det g$?

- [x] -24
- [ ] 6
- [ ] 24
- [ ] -6

Question 5 *(2 points)* Sélectionner les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^3$ ci-dessous qui vérifient que:

$$B = [f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}.$$

- [ ] $\begin{cases} \mathcal{B} = e_1,\ 2e_1 + e_2,\ -2e_1 - e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3,\ 2e_2,\ e_1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} \mathcal{B} = e_1,\ 2e_1 + e_2,\ -e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3,\ 2e_2,\ e_1 \end{cases}$
- [x] $\begin{cases} \mathcal{B} = e_1,\ 2e_1 + e_2,\ -2e_1 - e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3,\ \frac{1}{2}e_2,\ e_1 \end{cases}$
- [ ] $\begin{cases} \mathcal{B} = e_1,\ 2e_1 + e_2,\ -e_2 + e_3 \\ \mathcal{B}' = e_3,\ \frac{1}{2}e_2,\ e_1 \end{cases}$

Question 6 *(2 points)* On sait que :

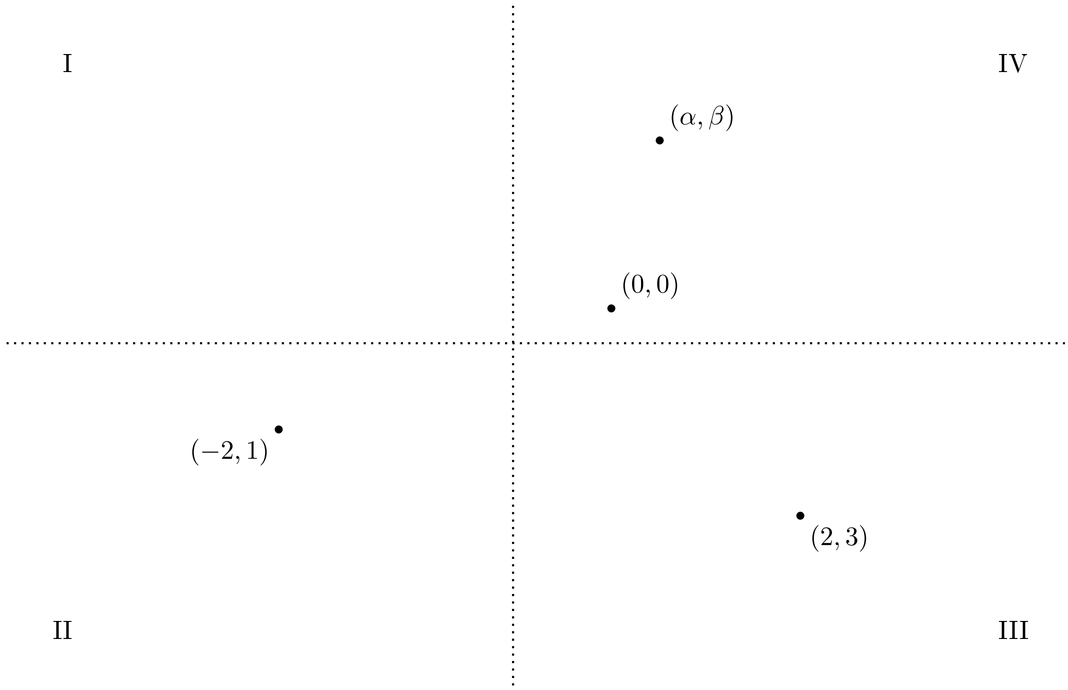
$$\operatorname{Ker} g : x = \frac{y}{2} = z.$$

Parmi les matrices suivantes, une seule est ligne-équivalente à A. Laquelle ?

- [ ] $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 2 & -1 & 0 \\ -7 & 3 & 1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -6 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
- [ ] $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -2 & 6 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$
- [x] $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Enoncé

On visualise $\mathbb{R}^2$ comme ci-dessous (vous pouvez écrire sur le dessin) :



Les deux droites représentées en pointillés découpent le plan en quatre zones numérotées en chiffre romain de I à IV. Par exemple, $(0,0)$ et (α, β) appartiennent à la zone numérotée IV. Dans quel zone se trouve ...

Question 7 *(2 points)* ... $(0,1)$?

■ III ☐ IV ☐ II ☐ I

Question 8 *(3 points)* ... $f(\alpha, \beta)$, où l'application linéaire f est définie par :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (-3x+2y, \tfrac{3}{2}x - y)\,?$$

☐ III ☐ IV ■ II ☐ I

Question 9 *(3 points)* ... $g(\alpha, \beta)$, où l'application linéaire g est définie par :

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \to (-\tfrac{1}{2}x+y, \tfrac{3}{4}x + \tfrac{1}{2}y)\,?$$

☐ III ☐ II ☐ IV ■ I

Deuxième partie, questions de type ouvert

Répondre dans l'espace dédié. Votre réponse doit être soigneusement justifiée, toutes les étapes de votre raisonnement doivent figurer dans votre réponse. Laisser libres les cases à cocher : elles sont réservées au correcteur.

Question 10: *Cette question est notée sur 9 points.*

■0 □1 □2 □3 □4 □5 □6 □7 □8 □9

On considère les éléments suivants de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (-1, 2, 0),\ v_2 = (1, 1, 1),\ v_3 = (0, 3, 1),\ v_4 = (2, 5, 3),\ v_5 = (-3, 4, 5).$$

Soit aussi le plan vectoriel $V = \mathrm{Vect}\,(v_1, v_2)$.

(a) Déterminer une équation de V. Est-ce que v_5 appartient à V ?

(b) Pour $v = (x, y, z) \in V$, écrire la décomposition de v sur la base suivante de V:

$$\mathcal{B} = v_1, v_2.$$

En déduire les coordonnées $[v]_{\mathcal{B}}$ de v dans $\mathcal{B}$.

(c) Soit la famille :

$$\mathcal{B}^{'} = v_3, v_4.$$

Montrer que $\mathcal{B}^{'}$ est une base de V et donner la matrice de changement de base de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Solution

(a) V a pour équation :

$$V \quad : \quad \underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 2 & 1 & y \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix}}_{2x+y-3z} = 0$$

On voit donc que v_5 n'appartient pas à V car :

$$2(-3) + 4 - 3 \cdot 5 = -17 \neq 0.$$

(b) On trouve la décomposition :

$$\underbrace{(x, y, z)}_{v} = (z - x)\underbrace{(-1, 2, 0)}_{v_1} + z\underbrace{(1, 1, 1)}_{v_2}$$

si bien que :

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} z - x \\ z \end{pmatrix}.$$

(c) Pour montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de V, il suffit de constater que v_3 et v_4 ne sont pas proportionnels et qu'ils appartiennent à V car :

$$2 \cdot 0 + 3 - 3 \cdot 1 = 0 \quad \text{et} \quad 2 \cdot 2 + 5 - 3 \cdot 3 = 0.$$

La matrice de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ a pour colonnes :

$$[v_3]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[(0, 3, 1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{d'après }(b)} \quad \text{et} \quad [v_4]_{\mathcal{B}} = \underbrace{[(2, 5, 3)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{d'après }(b)}.$$

Elle est donc égale à :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice recherchée, c'est-à-dire la matrice de changement de base de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ en est l'inverse. Elle vaut donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On peut vérifier notre calcul en constatant que l'on a bien :

$$\begin{cases} (-1,2,0) = \frac{3}{2}(0,3,1) - \frac{1}{2}(2,5,3) \\ (1,1,1) = -\frac{1}{2}(0,3,1) + \frac{1}{2}(2,5,3). \end{cases}$$

Question 11: *Cette question est notée sur 6 points.*

☒ 0 ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 ☐ 5 ☐ 6

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \to (-x + \tfrac{1}{2}y - \tfrac{1}{3}z, 6x - 3y + 2z).$$

(a) Ecrire la matrice de f en base canonique et en donner une décomposition colonne-ligne minimale.

(b) Déterminer une équation de $\operatorname{Im} f$ et une base de $\operatorname{Ker} f$.

(c) Sans aucune justification, donner une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ et une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ telles que :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solution

(a) La matrice de f en base canonique est :

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} \\ 6 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

f est donc de rang 1, la décomposition obtenue est minimale.

(b) Comme on peut écrire :

$$f(x, y, z) = (x - \tfrac{y}{2} + \tfrac{z}{3})(-1, 6)$$

on voit que:

$$\underbrace{\operatorname{Im} f}_{\operatorname{Vect}((-1,6))} : 6x + y = 0 \quad \text{et} \quad \underbrace{\operatorname{Ker} f}_{x - \frac{y}{2} + \frac{z}{3} = 0} : \operatorname{Vect}((1, 2, 0), (1, 0, -3)).$$

(c) Si l'on note $\mathcal{B} = v_1, v_2, v_3$ et $\mathcal{B}' = v_1', v_2', v_3'$, on a :

$$[f]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f(v_1) = (0, 0) \\ f(v_2) = 2v_1' - 12v_2' \\ f(v_3) = (0, 0) \end{cases}$$

On voit donc que v_1 et v_3 doivent former une base de $\operatorname{Ker} f$. Par conséquent, il faut choisir un v_2 en dehors de ce plan vectoriel (pour garantir que $\mathcal{B}$ soit bien une base de $\mathbb{R}^3$). Pour le choix de v_1' et v_2' on est très libres : il suffit juste de les choisir non proportionnels et de faire en sorte que la deuxième relation dans le système ci-dessus ait bien lieu. On peut par exemple prendre :

$$\mathcal{B} = (1, 2, 0), (-2, 0, 0), (1, 0, -3) \quad \text{et} \quad \mathcal{B}' = (1, 0), (0, 1).$$

Question 12: *Cette question est notée sur 9 points.*

☐0 ☐1 ☐2 ☐3 ☐4 ☐5 ☐6 ☐7 ☐8 ☐9

On donne l'application linéaire :

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \to (5x - 4y, 4x - 3y).$$

(a) Calculer le polynôme caractéristique de f. En déduire une forme réduite de f.

(b) Déterminer une base de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle f est représentée par la forme réduite trouvée au (a).

(c) Pour tout entier $n \geq 1$, déterminer A^n, où A est la matrice de f en base canonique.

Solution

(a) La matrice de f en base canonique est égale à :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}.$$

Son polynôme caractéristique est :

$$\chi_f(X) = X^2 - 2X + 1 = (X - 1)^2.$$

Comme $f \neq \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}$, on déduit que f n'est pas diagonalisable. Une forme réduite de f est alors :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) On trouve le sous-espace propre :

$$A - I_2 = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_{\mathbb{R}^2}) : \underbrace{x - y = 0}_{\mathrm{Vect}((1,1))}$$

On pose $v = (1, 0)$ un vecteur non propre de f, et

$$u = f(v) - v = \underbrace{f(1, 0)}_{(5,4)} - (1, 0) = (4, 4).$$

La base :

$$\mathcal{B} = (4, 4), (1, 0)$$

de $\mathbb{R}^2$ met donc f sous forme réduite :

$$\begin{cases} f(4, 4) = (4, 4) \\ f(1, 0) = (5, 4) = 1(4, 4) + 1(1, 0) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad [f]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) D'après (b) on a :

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}, \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad P^{-1} = \frac{1}{-4} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned} A^n &= P \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n P^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} 4 & 4n + 1 \\ 4 & 4n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & 4 \end{pmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{pmatrix} -16n - 4 & 16n \\ -16n & -4 + 16n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 + 4n & -4n \\ 4n & 1 - 4n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$